第 31 卷第 1 期
2001 年 1 月
浙江大学学报(人文社会科学版)
Journal of Zhejiang University(Humanities and Social Sciences)
Vol. 31, No. 1
Jan. 2001

# 易与吕律之确定

黄 晨[1], 袁 清[2]
(1. 浙江大学 图书馆, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江大学 人文社会科学处, 浙江 杭州 310027)

[摘 要] 制定律吕在中国古代是国家大事。律吕"隔八相生"可以从河图洛书中找到完美的对应关系,它说明了律吕和图书内在数理结构的同源性。而"三分损益"的律制算法,也可以通过河图的数学模式获得一种精确的定解。

[关键词] 吕律; 河图洛书; 三分损益
[中图分类号] B221 [文献标识码] A [文章编号] 1008-942X(2001)01-0130-05

## I-Ching and the Tuning System of Lü-Lü

HUANG Chen[1], YUAN Qing[2]
(1. *Zhejiang University Library*; 2. *Academic Advisory Office for the Humanities and Social Sciences, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

**Abstract**: There is a perfect correspondence between the ancient tuning system of Lü-Lü (invented in the Spring and Autumn Period) and the classical book of Hotu Luoshu, a correspondence which indicates the mathematical structural homogeneity in them. The principle of sanfenshunyi can also be calculated through the mathematical models in Hotu Luoshu.

**Key words**: Lü-Lü; Hotu Luoshu; sanfenshunyi

古语云:"制律吕,正声音,王者重大之事。"[1] 可见,古人对乐之一事是十分关切的。但是遍稽群书,对吕律的制定却极为暧昧不明。这大约要归因于孔夫子的"不语怪力乱神"[2],致使中国神话相当地历史化,故于事源的真伪很难辨定。

乐之一事,从古书看:"乐之所由来者远矣,生于度量,本于太一。"[3] "昔古朱襄氏之治天下也……士达作为五弦瑟……葛天氏之乐,三人操牛尾投足以歌八阕……陶唐氏之始……作为舞以宣导之。……黄帝令伶伦作为律。"[3] 由此看来,似乎吕律的制定可以上溯到黄帝,显然这是一个颇有疑问的结论。

据近人王光祈先生的假设,十二吕律的成立是在春秋战国时代,它是受南方各民族音乐的影响陆续增补而成的。并且吕律字谱在最初是一种敲击乐器的手法谱①。这论断主要根据十二吕律的名称,如黄钟、林钟、应钟、夹钟应该指的是钟声;而大吕、中吕、南吕也许系指一种"上下凸出中部凹入"形状之乐器;惟有太簇、姑洗、蕤宾、夷则、无射五个名称难解,很可能是根据"南蛮[illegible]舌之音"的音译[4]。如果这一假设成立,那么,在当时十二吕律便是指示奏者应击何器,加以钟之颜色(黄钟),吕之大小(大吕、中吕)等种种辨别记号,使奏者不会误击。

征之古籍,对十二吕律名目的释义最早可见于《国语·周语》[5],这在时间上同王先生的推断是相符的。但是,既然吕律作为字谱产生于钟磬之后,那在此之前定音的十二律——它们也许并不名之曰"黄钟"、"大吕",那么又源于何处呢?我们也许只能从吕律本身的关系来寻一点端倪了。《三

[收稿日期] 2000-03-04
[作者简介] 1. 黄晨(1970-),男,浙江杭州人,浙江大学图书馆数字资源中心馆员,主要从事传统文化研究及信息技术在图书馆中的应用; 2. 袁清(1966-),女,浙江杭州人,浙江大学人文社科处工程师,主要从事信息技术研究。

① 乐谱的形式之一,表示奏时应按何弦何孔,或应击何种钟磬。

礼义宗》云:“十二律者, 谓阳管有六, 阴管有六, 凡有十二。配之十二辰, 故有十二律。子为黄钟①, 丑为大吕, 寅为大簇, 卯为夹钟, 辰为姑洗, 巳为仲吕, 午为蕤宾, 未为林钟, 申为夷则, 酉为南吕, 戌为无射, 亥为应钟。阳六为律 ……律者法也, 言阳气施生, 各有其法; 阴六为吕 ……吕者助也, 所以助阴成功也。”[6]《周礼》中有一段很有意思的话:“奏黄钟, 歌大吕; 奏太簇, 歌应钟; 奏姑洗, 歌南吕; 奏无射, 歌夹钟; 奏蕤宾, 歌林钟; 奏夷则, 歌仲吕。”[7] 对照两段引文, 我们会发现一个奇妙的组合: 黄钟为子, 大吕为丑, 是谓子与丑合②; 太簇为寅, 应钟为亥, 乃寅亥相合; 姑洗为辰, 南吕为酉, 是辰酉相合 ……《周礼》的奏和歌同地支的六合若合符节。有学者认为, 传统上地支六合起于《河图》、《洛书》的数理关系, 因此, 我们也许该考虑一下吕律本之河图的可能, 当然这也许仅是巧合。

再来看看十二吕律隔八相生的说法: 律以隔八而相生, 由此律至彼律为第八位, 如黄钟生林钟, 林钟生太簇之类。但为什么声律必须隔八——而不是隔七、隔九相生呢? 似乎没有人解释过。我们不妨来看一下《洛书》(图 1):

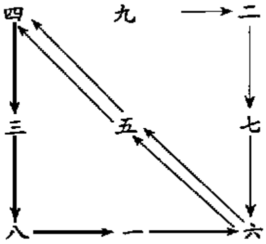


图 1

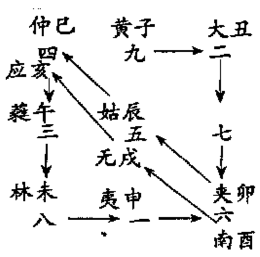


图 2

《洛书》只九数, 如何同十二律相关呢? 我们取四五六为界, 将洛书分为上下两个三角[8], 然后循着箭头所指方向将地支吕律依次相配, 如图 2 所示, 得到这张图, 隔八相生的疑问就迎刃而解了。依着九、八、七、六、五、四、三、二、一、六、五、四的顺序, 就得到黄、林、太、南、姑、应、蕤、大、夷、夹、无、仲, 正好是吕律相生的次序。而这个次序在吕律以音高排列的顺序中恰好是隔八位, 古人大约为了便于记忆, 便径直说隔八相生了。

由此, 我们似乎很难再说这是一种巧合吧! 那么, 是不是可以说真的有圣人则《河》、《洛》而定律呢? 恕笔者才疏学浅, 未能有更进一步的考据以资证明。不过, 笔者对这个说法倒不太以为然。陈兰甫《声律通考》云: 古者十二律, 立法简易, 后人衍算术, 说阴阳, 皆失其旨。可惜究竟如何“立法简易”, 陈氏也语焉不详。笔者认为, 声律本即是声律, 河洛本即是河洛, 它们是各有起源的。但是由于声律同河洛都以数为基础, 故而在深层中可能具有同样的数理结构, 致使两者在某种特定符号的沟通下(比如地支)可以相互衍化, 这是毫不奇怪的。正如中国人说“桌子”, 英国人说“table”, 我们依据实物可以将两者等同起来。这是因为中文同英文具有共同的基础——它们是不同民族表达意思的工具, 所以在某种情况下——最初也许是实物, 然后可能依据大脑语言系统中更深层的结构——可以沟通和转化。但是, 我们并不能因为英文里有“table”可以转换成同汉语中的“桌子”相对应, 就说英文源于中文, 即“圣人则汉语而制英文”之类。总之, 笔者旨在说明具有共同基础的事物之间, 可以通过一系列适当的符号而沟通, 执此而论它们的顺承关系是不足为据的。当然, 笔者的说法也是在考据不足的情况下略作阐释罢了。

接下来拟探讨一下吕律的计算问题。律管的长短, 历来本之“三分损益”的说法: 所谓黄钟阳律九寸, 三分损一下生阴吕林钟六寸; 林钟阴吕三分益一上生阳律太簇八寸……三分损一, 即把律管

① 气始于冬至, 冬至一阳生, 即十二月子; 律本于黄钟, 各律依此可推, 故子为黄钟, 余顺推。

② 十二地支之间有刑冲害化合等各种关系, 为五行家研究的专题。六合是指地支两两组合成六对的相合关系, 即子丑、寅亥、卯戌、辰酉、巳申、午未。

三分,去其一,实则以阳律乘三分之二得阴吕;三分益一,即把律管三分,增其一,实则以阴吕乘四分之三得阳律。如此循环,本当如图3所示(以黄钟为1,按《汉书·律历志》复图[9])。但是,这样的计算在蕤宾之后所得大吕、夹钟、仲吕均为半律,而非全律之数,于是在《淮南子·天文训》里一变而有下图①[10]:

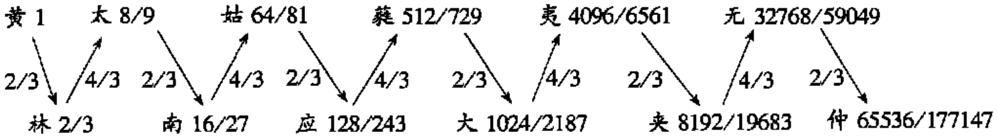


图3

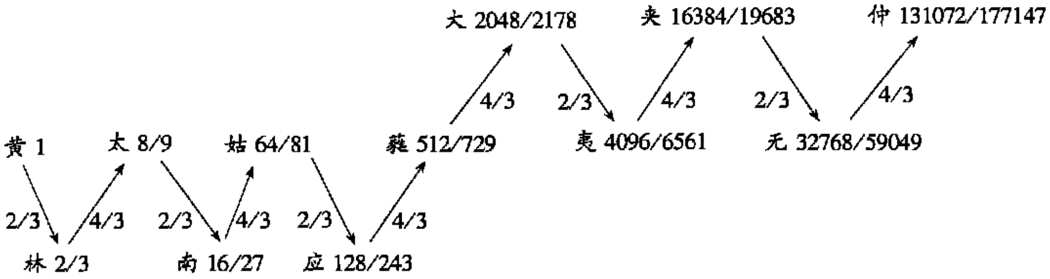


图4

上图虽然将"三分损益"同律数符合了,但是却把原有的上生下生秩序搞乱了。古人解释说,蕤宾为午,是五月之律,五月一阴始生,在卦为䷫(乾上巽下),故蕤宾虽当阳律实乃阴也;大吕为丑,是十二月之吕,阳气始生于十一月,苏于十二月,在卦为临(坤上兑下),故大吕虽当阴吕实乃阳也。详此则貌似蕤宾阳生大吕阴,实则阴蕤宾上生阳大吕也,故去三分损一而取三分益一。古人的解释显然难以自圆其说,五月一阴始生则蕤宾易阳为阴,尚属可通,而十一月一阳初生乃黄钟之阳,何必至十二月又一变,如此则二月三月皆可为阳,七月八月皆可为阴,岂非大乱。

撇开这些不讲,三分损益这个方法本身似乎也是有些问题的:按《律历志》仲吕之后当上生即 $65536/177147\times4/3=0.49327$,按《淮南子》仲吕下生 $131072/177147\times2/3=0.49327$,两者的生数是相同的,都和半黄钟的数据(0.5)有一个微小的差值。这个差值使古人伤透了脑筋,有的继续往下推衍,产生了后来的京房六十律和钱钧三百六十律[11];有的则说黄钟无半律,故仲吕损益不可得;有的说复生之律为变律,为变半律,有着种种诠释[1]。《淮南子》干脆以"仲吕极不相生"一推了事。但是一岁之气,终则复行,无径毫之断,何以吕律独不能接续循环呢?

通考古籍,三分损益之法最早见于《管子·地员篇》,在此之前如何定律,古籍就未有记载了。后世音学家大多远祖《管子》,故而都本此一说。惟有明朝宗室郑世子朱载堉于《律吕精义》里说:"律家三分损一,三分益一,犹历家四分度之一,四分日之一,与夫方五斜七,周三径一等率,皆举大略言之,非精义也。"[11]可谓发前代诸儒所未发,一语中的。三分损益既然只是个近似算法,自然就不能精确,所以到最后才会有一个差值。那么,何法才能求得精确的律管长短呢?《律吕精义》里只说:"新法算律与方圆,皆用勾股术,其法本诸《周礼》粟化之量,内方尺而圆其外……方尺即黄钟,圆径即蕤宾,由蕤宾可得南吕,由南吕可得应钟,既得应钟则终始循环,诸律皆可相生,安有往而不返之理哉?"[11]这段话只说了个大概,据此可以设黄钟为1,则蕤宾为$\sqrt{2}$,再如何推衍,便不得其详了。我们且将它放一下,看看清人江慎修在《河洛精蕴》里的论述,简

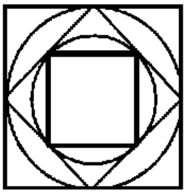

图5

① 淮南子以黄钟为八十一,为便于比较,复图时统一用黄钟为一。

析如下: 河图有四层, 最内一层五点, 次外层十点, 分别以五寸、十寸为边可作两个正方形。两方相距, 必在空隙, 可以在小方之外作一外接圆, 外接圆外可作外切方, 外切方外复作外接圆, 这一个圆便同最外的大方内切了。示意如图 5。

图5 中, 外方之十相当于黄钟正律十寸, 内方之五则是黄钟半律五寸。中间那个方, 根据几何学原理, 其边长为 $5\sqrt{2}$, 即七寸零七分一厘有奇, 江氏确认这就是蕤宾律管的真实长度, 河图的第三层一、二、三、四合十点, 以二层之十乘之为百, 第四层合三十点, 乘十为三百, 加三层为四百, 于是得到两个以十、二十为边径的正方形(此处牵强), 仍依前述又可得一图, 则内方应黄钟正律十寸, 外方应黄钟倍律二十寸, 中间一方一尺四寸一分四厘有奇, 是蕤宾倍律, 所以河图外二层又有十二倍律之数在。江氏主要即是据此推断倍律而还回整律的, 原文如次: 蕤宾倍律之率"……以勾十寸乘之, 得平方积一百四十一寸四十二分一十三厘五十六毫有奇为实, 开平方法除之, 得一尺一寸八分九厘二毫零七忽一微一许有奇, 即南吕倍律之率; 仍以勾十寸乘之, 又以股十寸乘之, 得立方积一千一百八十九寸二百零七分一百十五厘有奇为实, 开立方法除之, 得一尺零五分九厘四毫六丝三忽零九许有奇, 即应钟倍律之率……以黄钟倍律为二十, 进一位为实, 以应钟倍律为法除之, 得大吕倍律; 置大吕倍律, 进一位为实, 以应钟倍律为法除之, 得太簇倍律……以后皆仿此迭求之。"①

由江氏之法, 列新旧律图如下:

表 1　新旧律对照表

| 黄钟 | 正律九寸 | 旧三分损益黄钟九寸 |
|---|---|---|
| 大吕 | 八寸四分 九厘 四毫 八丝 六忽 | 八寸四分 二厘 八毫 弱 |
| 太簇 | 八寸零 一厘 八毫 零 八忽 | 八寸 |
| 夹钟 | 七寸五分 六厘 八毫 六忽 | 七寸四分 九厘 二毫 弱 |
| 姑洗 | 七寸 一分 四厘 三丝 零四微 | 七寸 一分 一厘 一毫 强 |
| 仲吕 | 六寸七分 四厘 二毫 三丝 八忽 | 六寸六分 五厘 九毫 强 |
| 蕤宾 | 六寸三分 六厘 三毫 九丝 六忽 | 六寸三分 二厘 零毫 强 |
| 林钟 | 六寸零分 六毫 七丝 七忽 九微 | 六寸 |
| 夷则 | 五寸六分 六厘 九毫 六丝 四忽 | 五寸六分 一厘 八毫 强 |
| 南吕 | 五寸三分 五厘 一毫 四丝 三忽 | 五寸三分 三厘 三毫 强 |
| 无射 | 五寸零 五厘 一毫 零 七忽 | 四寸九分 九厘 四毫 强 |
| 应钟 | 四寸七分 六厘 七毫 五丝 八忽 | 四寸七分 四厘 零毫 强 |

考核江氏原文, 不妨径设黄钟倍律为2, 则蕤宾倍律为$\sqrt{2}$, 然后对蕤宾开方, 得南吕倍律为$2^{\frac{1}{4}}$, 对其开立方, 得应钟倍律 $2^{\frac{1}{12}}$。自此以后, 以应钟除黄钟, 得大吕倍律 $2^{\frac{11}{12}}$, 应钟除大吕, 得太簇倍律$2^{\frac{10}{12}}$, 接续下去, 夹、姑、仲、蕤、林、夷、南、无分别为 $2^{\frac{9}{12}}$、$2^{\frac{8}{12}}$、$2^{\frac{7}{12}}$、$2^{\frac{6}{12}}$……最后得到十二吕律的倍律数, 各除以 2, 则得正律数 $2^0$、$2^{-\frac{1}{12}}$、$2^{-\frac{2}{12}}$……$2^{-1}$。然而, 问题在于一开始对蕤宾开方, 对南吕开立方, 无法从河洛理数上说明其原理何在, 故可推断它必是先求得吕律数再附会上去的。

《四库全书总目提要》批判《律吕精义》, 认为朱氏"盖本于诸乘方比例相求法, 云勾股术者, 饰词也。"[12] 所谓连比例法, 即 $a: x = x: b$, $x = \sqrt{a \times b}$, 即 $\sqrt{黄钟\times半黄钟}=$蕤宾。这个方法可谓一语中的, 惜乎不知是哪一位高手的发明了。

综上所述, 我们大约可以确定古人定律的方法, 并对十二吕律循环相续的谜总算有了眉目。从江氏的律数中可以看出, 十二吕律率实际上是一个以 $2^{-\frac{1}{12}}$为公比的等比数列, 具有确凿不移的

① 江氏力主吕律本于图书说, 故其算律之法亦全从河图着手, 虽难免繁复, 也能自成其说, 天真可喜。见清代江慎修《河洛精蕴·算律之法》, 学苑出版社 1989 年版, 第 303 页。

数。朱载 发千古所未发,兹将整理所得录之于下,以黄钟之律为1:

表2 朱氏新旧律对照表

| 律 吕 | 本 数 | 二者差 | 三分损益数 |
|---|---|---|---|
| 黄钟 | 1 | 0 | 1 |
| 大 吕 | $2^{-\frac{1}{12}}=0.94387$ | 0.00743 | $\frac{2048}{2187}=0.93644$ |
| 太 簇 | $2^{-\frac{2}{12}}=0.89089$ | 0.00200 | $\frac{8}{9}=0.88889$ |
| 夹 钟 | $2^{-\frac{3}{12}}=0.84089$ | 0.00850 | $\frac{16384}{19683}=0.83239$ |
| 姑 洗 | $2^{-\frac{4}{12}}=0.79370$ | 0.00358 | $\frac{64}{81}=0.79012$ |
| 仲 吕 | $2^{-\frac{5}{12}}=0.74915$ | 0.00925 | $\frac{131072}{177147}=0.73990$ |
| 蕤 宾 | $2^{-\frac{6}{12}}=0.70710$ | 0.00477 | $\frac{512}{719}=0.70233$ |
| 林 钟 | $2^{-\frac{7}{12}}=0.66741$ | 0.00074 | $\frac{2}{3}=0.66667$ |
| 夷 则 | $2^{-\frac{8}{12}}=0.62996$ | 0.00567 | $\frac{4096}{6561}=0.62429$ |
| 南 吕 | $2^{-\frac{9}{12}}=0.59460$ | 0.00201 | $\frac{16}{27}=0.59259$ |
| 无 射 | $2^{-\frac{10}{12}}=0.56123$ | 0.00631 | $\frac{32768}{59049}=0.55492$ |
| 应 钟 | $2^{-\frac{11}{12}}=0.52973$ | 0.00299 | $\frac{128}{243}=0.52674$ |
| 半黄钟 | $2^{-1}=0.5$ | 0.00673 | $\frac{262144}{631441}=0.49327$ |

在表2中很明显可以看到,三分损益之数同吕律的本数只有极微小的差别,仅在于千分位上的出入。相差如此小的两个音,人耳是根本无法分辨的。事实上,汉京房演六十律至"色育"时,同黄钟的差值是0.01781[10],这个差值显然比我们上表所示较大,但京房认为已不必再推,即可以"执始"为黄钟、吕律循环相续了。所以在应用上,三分损益的精度是足够了,同时,三分损益的算法显然要比江慎修所述简单得多,故而古籍只知有"三分损益",而把吕律本数埋没了。

由此看来,十二吕律是完全可以循环往复的,《淮南子》断言"惟吕律之数去而不返",显然也是错误的,而乐家关于上生下生、三分损益的争讼大约也可暂息了。当然,笔者无意令大家抛弃损益之法而宗求得之等比数列。现代人用计算机求得Π值小数点后几百万位,运用时还是取的3.14。笔者不过是正本清源,聊备一说罢了,还请有识指正。

## [参 考 文 献]


[1] 江慎修. 河洛精蕴[M]. 北京:学苑出版社, 1989. 297, 317, 307—308.

[2] 孔子. 论语·述而[M]. 北京:中华书局, 1979. 2481.

[3] 吕不韦. 吕氏春秋[M]. 上海:上海古籍书店, 1989. 43.

[4] 王光祁. 中国音乐史[M]. 北京:中华书局, 1934. 40.

[5] 佚名. 国语·周语下[M]. 上海:上海书店四部丛刊本, 1986. 45.

[6] 蔡祯. 词源疏证[M]. 北京:中国书店, 1985. 6.

[7] 阮元. 十三经注疏·周礼注疏[M]. 北京:中华书局. 1980. 788.

[8] 班固. 前汉书[M]. 上海:上海古籍出版社四库全书本, 1987. 249, 452—453.

[9] 刘文典. 淮南鸿烈集解[M]. 北京:中华书局, 1989. 112.

[10] 王光祁. 东西乐制之研究[M]. 北京:中华书局, 1926. 41—79, 50.

[11] 朱载 . 乐律全书[M]. 上海:上海古籍出版社四库全书本, 1987. 213—29.

[12] 纪晓岚. 四库全书·总目[Z]. 上海:上海古籍出版社, 1987. 1—786.


[责任编辑 徐 枫]